ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИГР

Основные определения

Теория игр – математический метод изучения оптимальных стратегий в играх. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон (игроков), ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу – в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учетом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках (стратегиях).

Теория игр – это раздел прикладной математики, точнее – исследования операций. Чаще всего методы теории игр находят применение в экономике, чуть реже в других общественных науках – социологии, политологии, психологии, этике и других.

При решении ряда практических задач приходится анализировать ситуации, в которых сталкиваются две (или более) враждующие стороны, преследующие различные цели, причем результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации мы можно отнести к **конфликтным ситуациям**.

Теория игр является математической теорией конфликтных ситуаций, при помощи которой можно выработать рекомендации по рациональному образу действий участников конфликта. Чтобы сделать возможным математический анализ ситуации без учета второстепенных факторов, строят упрощенную, схематизированную модель ситуации, которая называется **игрой**. Игра ведется по вполне определенным правилам, под которыми понимается система условий, регламентирующая возможные варианты действий игроков; объем информации каждой стороны о поведении другой; результат игры, к которому приводит каждая данная совокупность ходов.

Признаки игры как математической модели ситуации:

- наличие нескольких участников (игроков);
- неопределенность поведения участников, связанная с наличием у каждого из них нескольких вариантов действий (стратеги);
- различие (несовпадение) интересов участников;
- взаимосвязанность поведения участников, поскольку результат, получаемый каждым из них, зависит от поведения всех участников;
- наличие правил поведения, известных всем участникам.

Выигрыш показывает, какую прибыль получит конкретный игрок при выборе стратегий другими игроками. Единственная цель каждого игрока – максимизация его выигрыша.

Результат игры (выигрыш или проигрыш) вообще не всегда имеет количественное выражение, но обычно можно, хотя бы условно, выразить его числовым значением.

Ход – выбор одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление. Ходы делятся на личные и случайные. *Личным ходом* называется сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действий и его осуществление. *Случайным ходом* называется выбор из ряда возможностей, осуществляемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, выбор карты из перетасованной колоды и т. п.). Для каждого случайного хода правила игры определяют распределение вероятностей возможных исходов. Игра может состоять только их личных или только из случайных ходов, или из их комбинации.

Стратегия – это априори принятая игроком система решений (вида «если-то»), которых он придерживается во время ведения игры.

Оптимальная стратегия – это такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечит данному игроку максимально возможный средний выигрыш (минимально возможный средний проигрыш).

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтной ситуации, т. е. определение «оптимальной стратегии» для каждого из них. Стратегия, оптимальная по одному показателю, необязательно будет оптимальной по другим. Сознавая эти ограничения и поэтому не придерживаясь слепо рекомендаций, полученных игровыми методами, можно все же разумно использовать математический аппарат теории игр для выработки, если не в точности оптимальной, то, во всяком случае приемлемой стратегии.

КЛАССИФИКАЦИИ ИГР

В зависимости от количества игроков различают игры двух и n игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трех и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения.

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на «конечные» и «бесконечные». Игра называется:

- конечной, если у каждого игрока имеется только конечное число стратегий;
- бесконечной, если хотя бы у одного из игроков имеется бесконечное число стратегий.

По характеру взаимодействия игры делятся на

- бескоалиционные – игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции;
- коалиционные (кооперативные) – могут вступать в коалиции. В кооперативных играх коалиции заранее определены.

По характеру выигрышей игры делятся на:

- игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) , в случае двух игроков – антагонистические игры;
  Пример 1. «Орел и решка». Двое игроков подбрасывают по монете. Если результаты подбрасывания монеты совпали, то побеждает первый игрок, а второй проигрывает. Если результаты не совпали, то первый проигрывает, а второй – побеждает. Таблица выигрышей будет выглядеть:

		Игрок 2	
		О	Р
Игрок 1	О	1,-1	-1,1
	Р	-1,1	1,-1

  Также можно записать игру в виде матрицы выигрышей только игрока 1, т.к. они равны проигрышам игрока 2:

		Игрок 2	
		О	Р
Игрок 1	О	1	-1
	Р	-1	1

Пример 2. «Камень, Ножницы, Бумага». Можно представить в виде таблицы со значениями выигрышей для каждого игрока.

		Игрок 2		
		К	Н	Б
Игрок 1	К	0,0	1,-1	-1,1
	Н	-1,1	0,0	1,-1
	Б	1,-1	-1,1	0,0

Также можно записать игру в виде матрицы выигрышей только игрока 1, т.к. они равны проигрышам игрока 2:

		Игрок 2		
		К	Н	Б
Игрок 1	К	0	1	-1
	Н	-1	0	1
	Б	1	-1	0

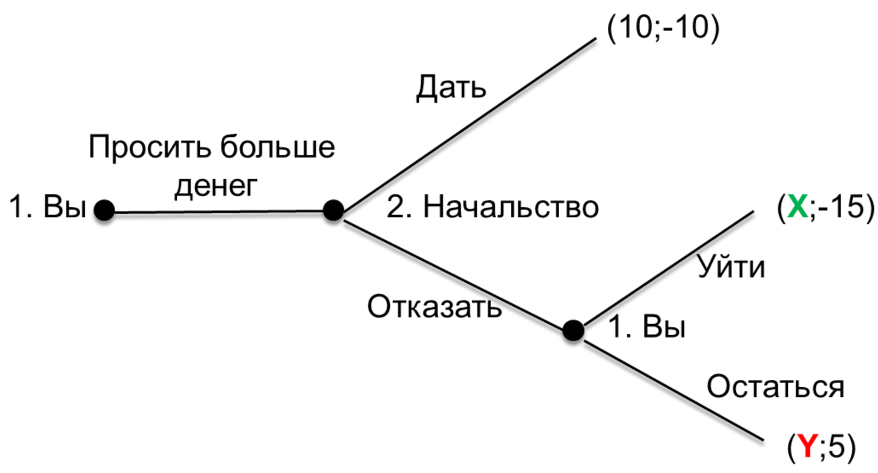
– игры с ненулевой суммой.

Пример 3. «Дилемма заключенного». Двое подозреваемых, А и В, находятся в разных камерах. Следователь, навещая их поодиночке, предлагает сделку следующего содержания: если один из них будет свидетельствовать против другого, а второй будет молчать, то первый заключенный будет освобожден, а второго осудят на 10 лет. Если оба будут молчать, то отсидят по 1 году. Если оба предадут друг друга, то каждый получит по 2 года. Каждый из заключенных должен принять решение: предать подельника или молчать, не зная о том, какое решение принял другой. Дилемма: какое решение примут заключенные?

Платежная матрица игры:

	Заключенный В молчит	Заключенный В предает
Заключенный А молчит	-1,-1	-10,0
Заключенный А предает	0,-10	-2,-2

Игру можно записать в виде таблицы выигрышей (см. выше) или в виде дерева.



В данном примере не указаны выигрыши, обозначенные на рисунке X и Y.

Доминирующие стратегии

Стратегия A_i игрока называется **строго доминирующей**, если выигрыш, который он получает, выбирая стратегию A_i, строго больше, чем выигрыш, который он получает, выбирая стратегию A_j.

Если у игрока есть строго доминирующая стратегия, то есть все основания полагать, что он выберет именно ее. Ему не нужно думать о том, что выберут остальные игроки – его выигрыш максимален. Если у обоих игроков есть строго доминирующие стратегии, то можно быть уверенным, что будет сыгран профиль, состоящий из этих стратегий. Такой профиль называется **равновесием в строго доминирующих стратегиях**.

Пример 4. Пусть игра задана платежной матрицей:

		Игрок 2		
		B_1	B_2	B_3
Игрок 1	A_1	4,2	0,3	5,1
	A_2	-1,0	1,3	1,2
	A_3	**7**,1	**2**,3	**8**,2

Какую бы из стратегий не выбрал игрок 2 (B_1, B_2 или B_3), максимальный выигрыш первому игроку принесет стратегия A_3. Таким образом, для первого игрока стратегия A_3 является доминирующей.

Стратегия A_i игрока называется **слабо доминирующей**, если выигрыш, который он получает, выбирая стратегию A_i, больше или равен выигрышу, который он получает, выбирая стратегию A_j.

Строго доминирующая стратегия всегда является слабо доминирующей. Обратное утверждение не верно.

Пример 5. Пусть игра задана платежной матрицей:

		Игрок 2		
		B_1	B_2	B_3
Игрок 1	A_1	4,2	0,3	5,1
	A_2	-1,0	**2**,3	1,2
	A_3	**7**,1	**2**,3	**8**,2

Стратегия A_3 является слабо доминирующей для игрока 1, т.к. при выборе игроком 2 стратегии B_2, первый получит одинаковые выигрыши как для стратегии A_3, так и для стратегии A_2.

Упрощение игр

Игры с ненулевой суммой

Пример 6. Пусть игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3
A_1	4,3	2,**7**	0,**4**
A_2	5,5	5,**-1**	-4,**-2**

Для второго игрока стратегия B_3 не имеет смысла по сравнению со стратегией B_2 (второй игрок, выбирая стратегию B_3, выиграет меньше, чем при выборе стратегии B_2). Говорят, что для него стратегия B_3 **заведомо хуже**, чем стратегия B_2. Это понимает и первый игрок. Поэтому игра будет упрощена:

	B_1	B_2
A_1	**4**,3	**2**,7
A_2	**5**,5	**5**,-1

Теперь у первого игрока появилась заведомо плохая стратегия A_1 (первый игрок, выбирая стратегию A_1, выиграет меньше, чем при выборе стратегии A_2). Игру снова можно упростить:

	B_1	B_2
A_2	5,**5**	5,**-1**

Очевидно, что равновесием (решением) игры в этом случае является:

	B_1
A_2	5,5

Замечание. В некоторых играх нет заведомо плохих стратегий, поэтому так можно решать не всякую игру.

Игры с нулевой суммой

Если в матрице игры все элементы строки, определяющей стратегию A_i игрока 1 меньше или равны соответствующим элементам другой строки, то стратегия A_i называется **заведомо невыгодной для игрока 1**.

Если в матрице игры все элементы столбца, определяющего стратегию B_j игрока 2 больше или равны соответствующим элементам другой строки, то стратегия B_j называется **заведомо невыгодной для игрока 2**.

Пример 7. Пусть игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	8	6	4	5	1
A_2	5	4	3	2	3
A_3	6	7	6	3	5
A_4	3	3	2	1	2

Сначала определим заведомо невыгодные стратегии для игрока 1 (маленький выигрыш): A_4 и A_2. Эти стратегии заведомо хуже, чем стратегия A_3. Матрица игры пример вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	8	6	4	5	1
A_3	6	7	6	3	5

Для игрока 2 заведомо невыгодными стратегиями (большой проигрыш) являются B_1, B_2 и B_3. Эти стратегии заведомо хуже, чем стратегия B_5. Матрица игры в упрощенном варианте:

	B_4	B_5
A_1	5	1
A_3	3	5

Антагонистические игры: чистые стратегии, принцип минимакса

Рассмотрим конечную игру, в которой первый игрок имеет m стратегий, а второй игрок B – n стратегий. Такая игра называется игрой $m \times n$. Обозначим стратегии $A_1, A_2, ..., A_m$ и $B_1, B_2, ..., B_n$. Предположим, что каждая сторона выбрала определенную стратегию: A_i или B_j. Если игра состоит только из личных ходов, то выбор стратегий однозначно определяет исход игры – выигрыш одной из сторон a_{ij}.

Предположим, что нам известны значения a_{ij} при каждой паре стратегий. Эти значения можно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы), строки которой соответствуют стратегиям A_i, а столбцы – стратегиям B_j.

Тогда, в общем виде матричная игра может быть записана следующей платежной матрицей:

		Игрок 2			
		B_1	**B_2**	**...**	**B_n**
Игрок 1	**A_1**	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

где A_i – названия стратегий игрока 1, B_j – названия стратегий игрока 2, a_{ij} – значения выигрышей игрока 1 при выборе им i–й стратегии, а игроком 2 – j-й стратегии. Поскольку данная игра является игрой с нулевой суммой, значение выигрыша для игрока 2 является величиной, противоположенной по знаку значению выигрыша игрока 1.

При определении наилучших стратегий игроков основой рассуждений является принцип, который предполагает, что противники, участвующие в игре, одинаково разумны, и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели.

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш с учетом поведения противодействующего ему игрока. Поэтому для игрока 1 необходимо определить минимальные значения выигрышей в каждой из стратегий, а затем найти максимум из этих значений, то есть определить величину

$$V_н = \max_i \min_j a_{ij}$$

или найти минимальные значения по каждой из строк платежной матрицы, а затем определить максимальное из этих значений. Величина $V_н$ называется *максимином матрицы* или *нижней ценой игры*. Та стратегия игрока, которая соответствует максимину $V_н$ называется *максиминной стратегией*.

Очевидно, если мы будем придерживаться максиминной стратегии, то нам при любом поведении противника гарантирован выигрыш, не меньший $V_н$. Поэтому величина $V_н$ – это тот гарантированный минимум, который мы можем себе обеспечить, придерживаясь своей наиболее осторожной стратегии.

Величина выигрыша игрока 1 равна, по определению матричной игры, величине проигрыша игрока 2. Поэтому для игрока 2 необходимо определить значение

$$V_в = \min_j \max_i a_{ij}$$

Или найти максимальные значения по каждому из столбцов платежной матрицы, а затем определить минимальное из этих значений. Величина $V_в$ называется *минимаксом матрицы*, *верхней ценой игры* или минимаксным выигрышем. Соответствующая выигрышу стратегия противника называется его *минимаксной стратегией*. Придерживаясь своей наиболее осторожной минимаксной стратегии, противник гарантирован, что в любом случае он проиграет не больше $V_в$.

В случае, если значения $V_н$ и $V_в$ не совпадают, при сохранении правил игры (коэффициентов a_{ij}) в длительной перспективе, выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. Устойчивость он приобретает лишь при равенстве $V_н = V_в = V$. В этом случае говорят, что *игра имеет решение в чистых стратегиях (имеет седловую точку)*, а стратегии, в которых достигается V – *оптимальными чистыми стратегиями*. Величина V называется *чистой ценой игры*.

Пример 8. Пусть игра задана платежной матрицей:

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Минимальный выигрыш А**
A_1	17	16	15	14	**14=max**
A_2	11	18	12	13	11
A_3	18	11	13	12	11
Максимальный проигрыш В	18	18	15	**14=min**	

Для игрока 1 оптимальной чистой стратегией будет стратегия A_1, а для игрока 2 – стратегия B_4. Седловая точка (цена игры) равна 14. Решение в чистых стратегиях существует: первый игрок должен выбрать стратегию A_1, второй – B_4, при этом выигрыш первого игрока (проигрыш второго) будет равен 14.

Пример 7. Упрощенная матрица игры из Примера 7:

	B_4	B_5	**Минимальный выигрыш А**
A_1	5	1	1
A_3	3	5	**3=max**
Максимальный проигрыш В	**5=min**	**5=min**	

Нижняя цена игры достигается в стратегии A_3 и ее значение равно 3, в то время как верхняя цена игры достигается в стратегии B_5 и ее значение равно 5. Седловых точек нет. Решение в чистых стратегиях не существует.

Пример 9. Пусть игра задана платежной матрицей:

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Минимальный выигрыш А**
A_1	17	16	15	12	**12=max**
A_2	11	18	12	13	11
A_3	18	11	13	12	11
Максимальный проигрыш В	18	18	15	**13=min**	

Нижняя цена игры достигается в стратегии A_1 и ее значение равно 12, в то время как верхняя цена игры достигается в стратегии B_4 и ее значение равно 13. Седловых точек нет. Решение в чистых стратегиях не существует.

Антагонистические игры: смешанные стратегии

Случайное использование в игре чистых стратегий с некоторыми заранее определенными вероятностями называется **смешанной стратегией**.

Например, у игрока есть три стратегии: A_1, A_2 и A_3. Вероятности выбрать эти стратегии равны 0,4, 0,5 и 0,1 соответственно. Как определиться с выбором стратегии с учетом заданных вероятностей? Можно запустить генератор случайных чисел от 0 до 1 включительно. Если выпадает число [0; 0,4), то выбирается стратегия A_1, если [0,4; 0,9) – то стратегия A_2, если [0,9; 1] – то стратегия A_3. Вместо генератора случайных чисел можно ориентироваться на положение секундной стрелки на циферблате часов. Если вероятность выбора каждой из двух стратегий игрока равна 1/2, то в качестве критерия выбора стратегии можно подбрасывать монету.

ТЕОРЕМА. Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку 1 максимальный средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш), равный цене игры, независимо от того, какие действия предпринимает игрок 2, если только он не выходит за пределы своих стратегий.

В конечных играх всегда есть решения в смешанных стратегиях.

<u>Пример 10</u>. Пусть игра задана платежной матрицей:

		Игрок 2		Минимальный выигрыш A
		B_1	B_2	
Игрок 1	A_1	5	-1	-1
	A_2	2	4	**2=max**
Максимальный проигрыш B		5	**4=min**	

Седловых точек нет. Решение в чистых стратегиях невозможно.

Найдем решение в смешанных стратегиях с учетом теоремы, обозначенной выше.

Для игрока 1

Вероятность выбрать стратегию A_1 равна p_1, вероятность выбрать стратегию A_2 – p_2 ($p_2 = 1 – p_1$).

Согласно теореме выше выигрыш для игрока 1, равный цене игры (V), не зависит от стратегии, выбранной игроком 2. Тогда, если игрок 2 выбрал стратегию B_1, то выигрыш игрока 1 равен

$5p_1 + 2p_2=V$,

если игрок 2 выбрал стратегию B_2, то выигрыш игрока 1 равен

$(-1)p_1+4p_2=V$,

причем $p_1 + p_2 = 1$.

Решая такую систему получим: $p_1 = 1/4$, $p_2=3/4$, $V = 11/4$.

Для игрока 2

Вероятность выбрать стратегию B_1 равна q_1, вероятность выбрать стратегию B_2 – q_2 ($q_2 = 1 – q_1$).

Согласно теореме выше выигрыш для игрока 2, равный цене игры (V), не зависит от стратегии, выбранной игроком 1. Тогда, если игрок 1 выбрал стратегию A_1, то выигрыш игрока 2 равен

$5q_1 + (-1)q_2=V$,

если игрок 1 выбрал стратегию A_2, то выигрыш игрока 2 равен

$2q_1+4q_2=V$,

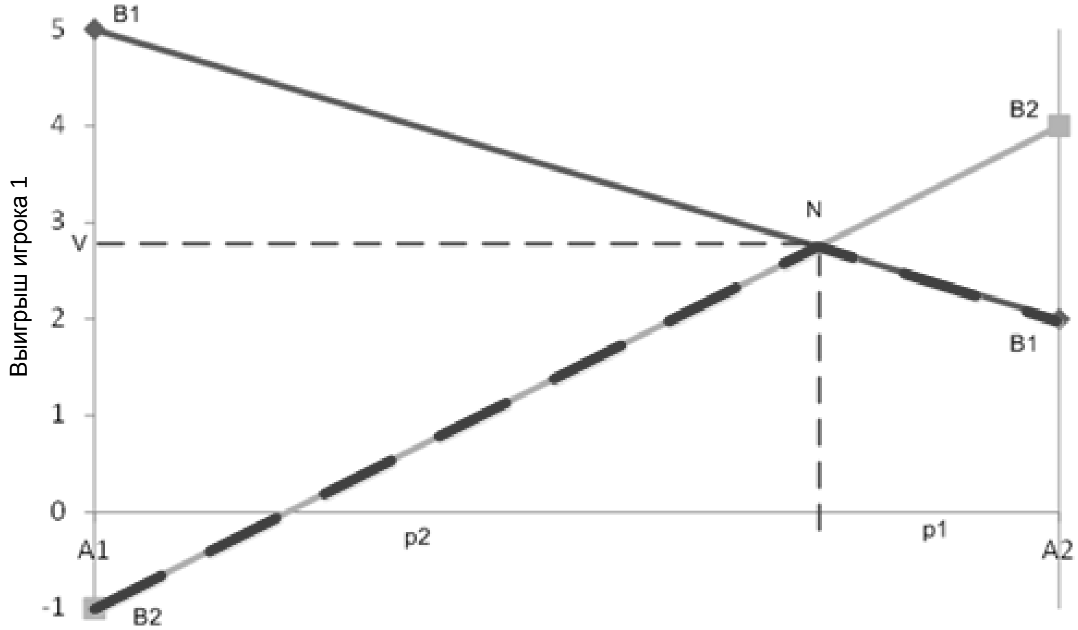
причем $q_1 + q_2 = 1$.

Решая такую систему, получим: $q_1 = 5/8$, $q_2=3/8$.

Практический вывод. Из 8 таких же игр для достижения равновесия игрок 1 должен выбрать первую стратегию 2 раза, вторую стратегию 6 раз, тогда как (независимо от решений первого игрока) второй игрок должен выбрать свою первую стратегию 5 раз, а свою вторую – 3 раза.

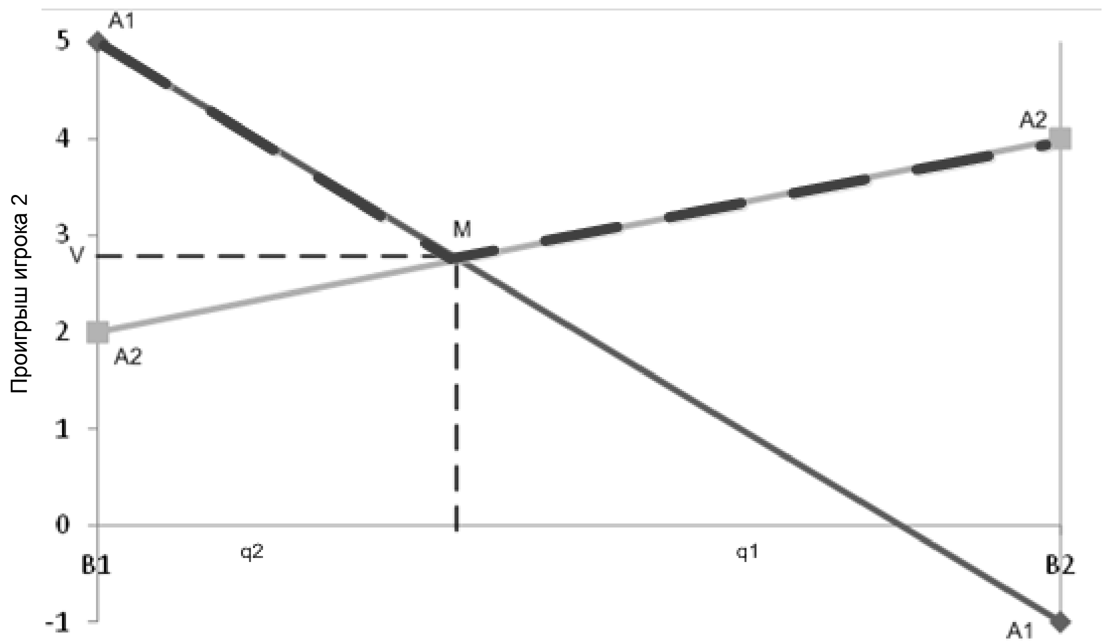
Решение можно проиллюстрировать на рисунке.

Для игрока 1:



Жирным пунктиром обозначена нижняя граница выигрыша игрока 1. Максимальное значение (точка N) – оптимальное решение.

Для игрока 2:



Жирным пунктиром обозначена верхняя граница проигрыша игрока 2. Минимальное значение (точка M) – оптимальное решение.

Пример 11. Пусть игра задана платежной матрицей (вида 2x*n*):

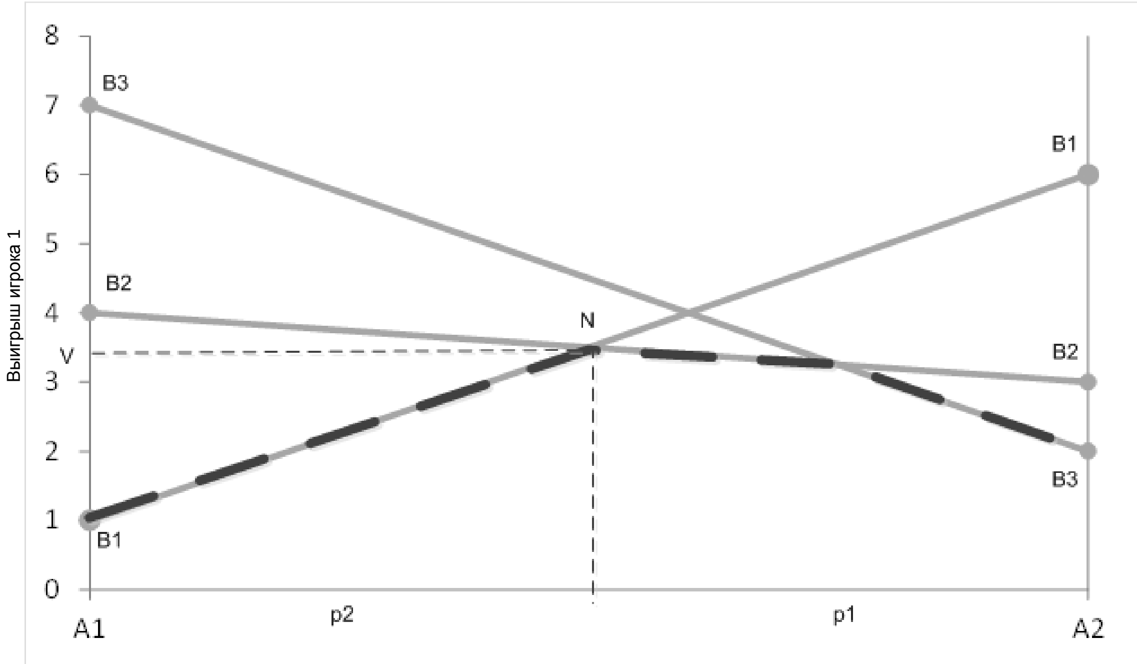
		Игрок 2			Минимальный выигрыш А
		B_1	B_2	B_3	
Игрок 1	A_1	1	4	7	1
	A_2	6	3	2	**2=max**
Максимальный проигрыш В		6	**4=min**	7	

Требуется найти решение игры.

Седловых точек нет. Решение в чистых стратегиях невозможно.

Найдем решение в смешанных стратегиях графическим способом.

Для игрока 1 (т.к. у него только две стратегии):



По рисунку определяются **активные стратегии** игрока 2: точка оптимума (N) – это B_1 и B_2. Из платежной матрицы игры можно исключить неактивную стратегию B_3 игрока 2 (этой стратегии сразу можно приписать вероятность, равную 0):

		Игрок 2	
		B_1 (q)	B_2 (1-q)
Игрок 1	A_1 (p)	1	4
	A_2 (1-p)	6	3

Оптимальную смешанную стратегию игрока 1 найдем из соотношений:

$1p+6(1-p) = V$,

$4p + 3(1-p) = V$.

Откуда $p = 1/2$, $V = 7/2$.

Для игрока 2 оптимальная стратегия определяется из соотношений:

$1q + 4(1-q) = V$,

$6q + 3(1-q) = V$.

Откуда $q = 1/6$.

Таким образом, возвращаясь к исходной платежной матрице игры, запишем вероятности стратегий, соответствующие равновесию (цене игры 7/2):

		Игрок 2		
		B_1 (1/6)	B_2 (5/6)	B_3 (0)
Игрок 1	A_1 (1/2)	1	4	7
	A_2 (1/2)	6	3	2

Пример 12. Пусть игра задана платежной матрицей (вида *m*x2):

		Игрок 2	
		B_1	B_2
Игрок 1	A_1	0,4	1,0
	A_2	0,5	0,5
	A_3	1,0	0,3
	A_4	0,8	0,3

Требуется найти решение игры.

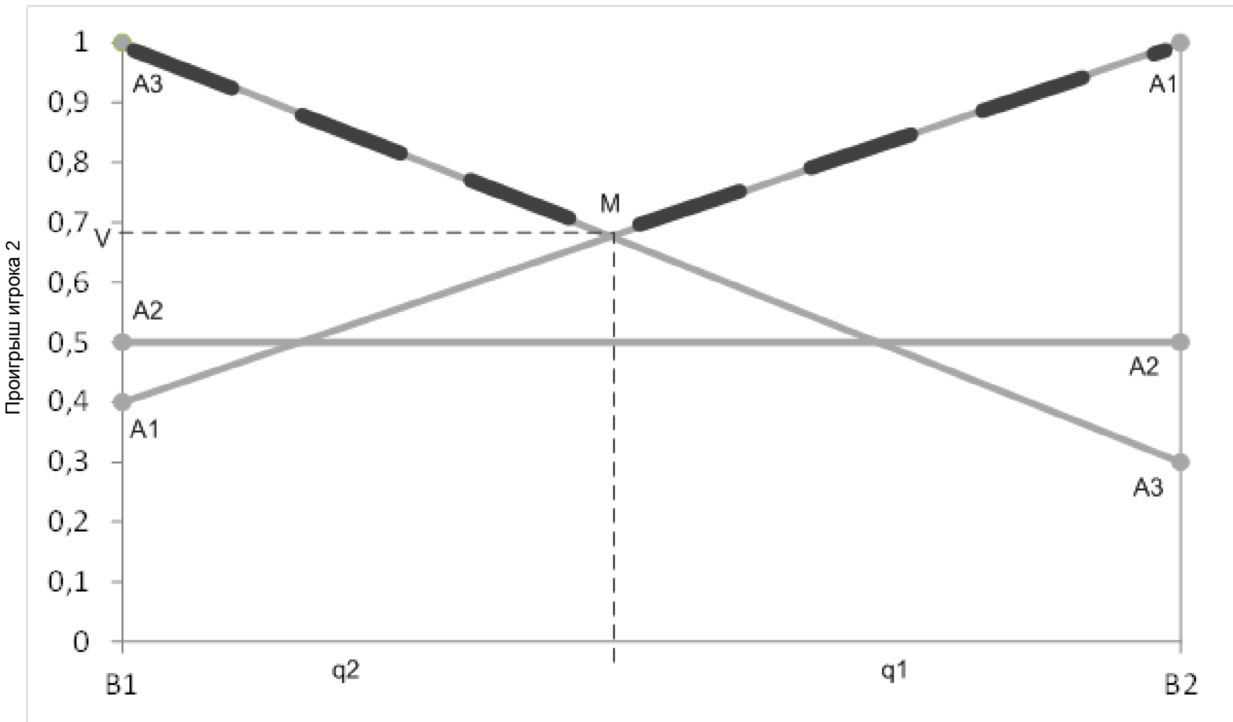
Стратегия A_4 является заведомо невыгодной, по сравнению со стратегией A_3, т.е. A_4 можно исключить (вероятность выбора этой стратегии будет равна 0). Тогда матрица игры пример вид:

		Игрок 2		Минимальный выигрыш А
		B_1	B_2	
Игрок 1	A_1	0,4	1,0	0,4
	A_2	0,5	0,5	**0,5=max**
	A_3	1,0	0,3	0,3
Максимальный проигрыш В		**1,0=min**	**1,0=min**	

Седловых точек нет. Решение в чистых стратегиях невозможно.

Найдем решение в смешанных стратегиях графическим способом.

Для игрока 2 (т.к. у него только две стратегии):



По рисунку определяются **активные стратегии** игрока 1: точка оптимума (М) – это A_1 и

A_3. Из платежной матрицы игры можно исключить неактивную стратегию A_2 игрока 1 (этой стратегии сразу можно приписать вероятность, равную 0):

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Игрок 2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>B_1 (q)</td><td>B_2 (1-q)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Игрок 1</td><td>A_1 (p)</td><td>0,4</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>A_3 (1-p)</td><td>1,0</td><td>0,3</td></tr>
</table>

Оптимальную смешанную стратегию игрока 2 найдем из соотношений:

$0,4q + 1\ (1 – q) = V$,

$1q + 0,3(1 – q) = V$.

Откуда $q = 7/13$, $V = 44/65$.

Для игрока 1 оптимальная стратегия определяется из соотношений:

$0,4p + 1(1 – p) = V$,

$1p + 0,3(1 – p) = V$.

Откуда $p = 7/13$.

Таким образом, возвращаясь к исходной платежной матрице игры, запишем вероятности стратегий, соответствующие цене игры 44/65:

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Игрок 2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>B_1 (7/13)</td><td>B_2 (6/13)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Игрок 1</td><td>A_1 (7/13)</td><td>0,4</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>A_2 (0)</td><td>0,5</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>A_3 (6/13)</td><td>1,0</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>A_4 (0)</td><td>0,8</td><td>0,3</td></tr>
</table>

Неантагонистические игры. Равновесие по Нэшу

Равновесием по Нэшу называется такой набор стратегий, что никакому игроку невыгодно отклоняться от своей стратегии в этом наборе. Т.е. ни один участник не может увеличить выигрыш, изменив свое решение в одностороннем порядке, когда другие участники не меняют решения.

«Я делаю все, что могу, при том, что ты делаешь» и
«Ты делаешь все, что можешь, при том, что я делаю»

Равновесия Нэша – одно из основных понятий теории игр. Они отражают устойчивые исходы при неспособности игроков договориться.

Равновесие по Нэшу – это ситуация, когда ни у одного игрока нет стимулов изменять свою стратегию при данной стратегии другого игрока, позволяющая игрокам достичь компромиссного решения.

В играх с нулевой суммой (антагонистических) седловая точка является равновесием по Нэшу.

Алгоритм определения равновесий по Нэшу:

1. Для каждой фиксированной стратегии игрока 2 отметить символом * наилучшие стратегии (с максимальным выигрышем) игрока 1.
2. Для каждой фиксированной стратегии игрока 1 отметить символом * наилучшие стратегии (с максимальным выигрышем) игрока 2.
3. Ячейки платежной матрицы, содержащие ** (две «звездочки») являются равновесиями по Нэшу.

<u>Пример 13.</u>

Дана платежная матрица игры:

	B_1	B_2	B_3
A_1	0, 0	*25, 40*	*5, 10
A_2	*40, 25*	0, 0	*5, 15
A_3	10, 5	15, 5	0, 10*

В данной игре два равновесия по Нэшу.

<u>Пример 3.</u> В «дилемме заключенного»:

	Заключенный В молчит	Заключенный В предает
Заключенный А молчит	-1,-1	-10,0*
Заключенный А предает	*0,-10	*-2,-2*

Два рациональных преступника всегда предадут друг друга. Два нерациональных будут молчать. Значит ли это, что лучше быть нерациональным? Нет, поскольку если заключенный В нерационален, то заключенному А будет только лучше

Замечание. Существуют и другие способы определения оптимального решения игры, например, **оптимальность по Парето**. Это такое состояние системы, при котором значение каждого частного критерия, описывающего состояние системы, не может быть улучшено без ухудшения положения других элементов. Принцип Парето: «Всякое изменение, которое не приносит убытков, а которое некоторым людям приносит пользу (по их собственной оценке), является улучшением». Таким образом, признается право на все изменения, которые не приносят никому дополнительного вреда. В данном примере Парето-оптимальным решением является ситуация «молчит-молчит». Для игр с ненулевой суммой Парето-оптимум может не совпадать с равновесием по Нэшу.

Пример 14. Рассмотрим пример игры в загрязнения окружающей среды. Здесь объектом нашего внимания станет такой вид побочных эффектов производства, как загрязнение. Если бы фирмы никогда и никого не спрашивали о том, как им поступить, любая из них скорее предпочла бы создавать загрязнения, чем устанавливать дорогостоящие очистители. Если же какая-нибудь фирма решилась бы уменьшить вредные выбросы, то издержки, а, следовательно, и цены на ее продукцию, возросли бы, а спрос бы упал. Вполне возможно, эта фирма просто обанкротилась бы. Живущие в жестоком мире естественного отбора, фирмы скорее предпочтут оставаться в условиях равновесия по Нэшу, при котором не нужно расходовать средства на очистные сооружения и технологии. Ни одной фирме не удастся повысить прибыль, уменьшая загрязнение.

	Фирма 1	
Фирма 2	**Низкий уровень загрязнения**	**Высокий уровень загрязнения**
Низкий уровень загрязнения	100,100	-30,120*
Высокий уровень загрязнения	*120,-30	*100,100*

Вступив в экономическую игру, каждая неконтролируемая государством и максимизирующая прибыль фирма будет производить загрязнения воды и воздуха. Если какая-либо фирма попытается очищать свои выбросы, то тем самым она будет вынуждена повысить цены и потерпеть убытки. Некооперативное поведение установит равновесие по Нэшу в условиях высоких выбросов. Правительство может предпринять меры с тем, чтобы равновесие переместилось в верхнюю левую ячейку. В этом положении загрязнение будет незначительным, прибыли же останутся теми же.

Игры загрязнения – это ситуация, когда равновесие по Нэшу неэффективно. Иногда подобные неконтролируемые игры становятся угрожающими, и здесь может вмешаться правительство. Установив систему штрафов и квот на выбросы, правительство может побудить фирмы выбрать исход, соответствующий низкому уровню загрязнения. Фирмы зарабатывают ровно столько же, сколько и прежде, при больших выбросах, мир же становится несколько чище.

Смешанные стратегии для игр с ненулевой суммой

Пример 15. «Семейный спор». Семья из двух человек пытается решить, куда пойти вечером. Муж, разумеется, хочет идти на футбол, в то время как жена пытается вытащить мужа в театр. Но, несмотря на этот конфликт интересов, и муж, и жена хотят провести вечер вместе, и ни футбол, ни театр будут не в радость, если пойти туда одному. Осталось только сделать предположение (пожалуй, самое противоестественное), что муж и жена не обсуждают друг с другом свои решения, а просто сами по себе идут или на футбол, или в театр. У игры получается следующая матрица (строки выбирает муж, столбцы — жена; в векторе результатов первый компонент принадлежит мужу, второй — жене).

		Жена	
		Ф (q)	Т (1-q)
Муж	Ф(p)	5,2	0,0
	Т(1-p)	0,0	2,5

Как нетрудно заметить, у этой игры два равновесия Нэша: Ф,Ф и Т,Т.

Ни мужу, ни жене невыгодно отклоняться от одного из этих равновесий. Но вот первая беда: любое из них нечестное – если постоянно выбирать одну и ту же стратегию (а стимулов отклоняться-то нет), один супруг будет получать значительно большую выгоду, чем другой.

Можно попробовать решить эту игру в смешанных стратегиях.

Для мужа:

$5p + 0(1-p) = V$ (если жена решит пойти на футбол),

$0p + 2(1-p) = V$ (если жена решит пойти в театр),

откуда $p = 2/7$, $V = 10/7$.

Для жены:

$2q + 0(1-q) = V$ (если муж решит пойти на футбол),

$0q + 5(1-q) = V$ (если муж решит пойти в театр),

Откуда $q = 5/7$.

Выгода от использования смешанной стратегии ниже, чем от равновесных решений по Нэшу.

То есть, грубо говоря, муж и жена заранее договариваются: кто-то (возможно, кто-то третий – важно, что ни один участник не контролирует этот результат, но оба имеют к нему доступ) подбросит монетку (более корректно включать генератор случайных чисел, т.к. вероятности не равны 1/2), и если выпадет орел, то они вместе пойдут в театр, а если решка – на футбол. В такой ситуации исход получается оптимальным: и точку 0,0 выбирать никогда не придется, и равновесие честное, ведь у каждого участника ожидаемая выгода равна 10/7.