ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ИГР

Контрольная работа будет выдана непосредственно на экзамене.
Задание у всех будет одинаковое, а платежная матрица игры – своя у каждого студента.

Пусть игра задана платежной матрицей:

		Игрок 2			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Игрок 1	A_1	2	0	1	4
	A_2	1	2	5	3
	A_3	4	1	3	2

Задание

1. Упростить игру путем удаления заведомо невыгодных стратегий.
2. Существует ли решение игры в чистых стратегиях (на основе принципа минимакса)?
3. Получить решение игры в смешанных стратегиях. Чему равна цена игры? Проиллюстрировать решение на графиках для каждого из игроков.

Решение

1. Упростим игру, удаляя заведомо невыгодные стратегии.
   Для игрока 2 (столбцы платежной матрицы) стратегии B_3 и B_4 заведомо хуже, чем B_2 (выбирая стратегии B_3 и B_4 игрок 2 потеряет больше, чем при выборе стратегии B_2). Их можно удалить. Тогда упрощенная матрица игры пример вид:

	B_1	B_2
A_1	2	0
A_2	1	2
A_3	4	1

   Для игрока 1 (строки платежной матрицы) стратегия A_1 заведомо хуже, чем A_3 (выбирая стратегию A_1 игрок 1 выиграет меньше, чем при выборе стратегии A_3). Ее можно удалить. Тогда упрощенная матрица игры пример вид:

	B_1	B_2
A_2	1	2
A_3	4	1

   Дальнейшее упрощение игры невозможно (больше нет заведомо невыгодных стратегий игроков).
   Вероятности выбора игроком 1 стратегии A_1 и игроком 2 стратегий B_3, B_4 равны нулю.

2. Проверим, существует ли решение игры в чистых стратегиях на основе принципа минимакса.

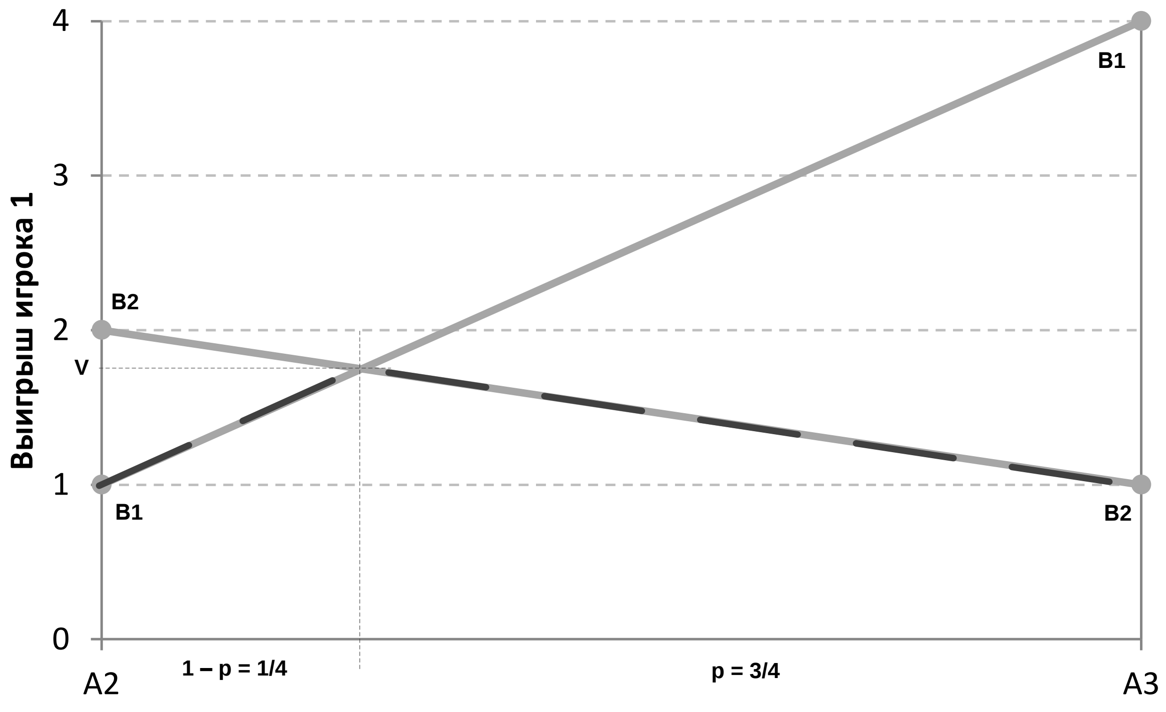
	B_1	B_2	Минимальный выигрыш игрока 1
A_2	1	2	**1=max (нижняя цена игры)**
A_3	4	1	**1=max (нижняя цена игры)**
Максимальный проигрыш игрока 2	4	**2=min (верхняя цена игры)**	**Вывод**: верхняя и нижняя цена игры не совпадают, седловых точек нет, решение в чистых стратегиях не возможно.

3. Найдем решение в смешанных стратегиях и цену игры.
   В платежной матрице игры обозначим вероятности выбора стратегий для каждого из игроков:

	B_1 (q)	B_2 (1 – q)
A_2 (p)	1	2
A_3 (1 – p)	4	1

Обозначим цену игры V.
Для игрока 1:

1p + 4(1 – p) = V (если игрок 2 выберет стратегию B_1),
2p + 1(1 – p) = V (если игрок 2 выберет стратегию B_2).
Решаем систему уравнений:
1p + 4(1 – p) = 2p + 1(1 – p),
1p + 4 – 4p = 2p + 1 – p,
– 3p + 4 = p + 1,
– 4p = – 3,
p = 3/4.
Таким образом, для игрока 1 вероятность выбора стратегии A_2 равна 3/4, вероятность выбора стратегии A_3 – 1/4.
Найдем цену игры V, подставив вычисленную вероятность p в первое уравнение:
V = 3/4 + 4(1 – 3/4) = 7/4.
Вывод для игрока 1: если игра играется многократно, игроку 1 необходимо выбирать стратегию A_2 с вероятностью 3/4, стратегию A_3 с вероятностью 1/4 (стратегию A_1 вообще никогда не выбирать, т.к. она заведомо невыгодная, см. пункт 1 задания), чтобы получить максимальный средний выигрыш, равный цене игры 7/4.
Иллюстрация решения на рисунке ниже:



Для игрока 2:

$1q + 2(1 – q) = V$ (если игрок 1 выберет стратегию A_2),

$4q + 1(1 – q) = V$ (если игрок 2 выберет стратегию A_3).

Решаем систему уравнений:

$1q + 2(1 – q) = 4q + 1(1 – q)$,

$q + 2 – 2q = 4q + 1 – q$,

$– q + 2 = 3q + 1$,

$– 4q = – 1$,

$q = 1/4$.

Таким образом, для игрока 2 вероятность выбора стратегии B_1 равна 1/4, вероятность выбора стратегии B_2 – 3/4.

Вывод для игрока 2: если игра играется многократно, игроку 2 необходимо выбирать стратегию B_1 с вероятностью 1/4, стратегию B_2 с вероятностью 3/4 (стратегии B_3 и B_4 вообще никогда не выбирать, т.к. они заведомо невыгодные, см. пункт 1 задания), чтобы получить минимальный средний проигрыш, равный цене игры 7/4.

Иллюстрация решения на рисунке ниже: